ベルヌーイ数とゼータ関数

情報科学科　北田　柊偉　　　指導教員：田坂　浩二

1　序文

ベルヌーイ数 $B_n(n=0,1,2,\cdots)$ を逐次

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=n+1 \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1}$$

で定める。リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ を $\mathrm{Re}(s)>1$ である複素数 s に対して、

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{2}$$

で定義する。これは、$\mathrm{Re}(s)>1$ の範囲で絶対収束し、ある表示式を通して全 s 平面の有理型関数に解析接続される。Euler(1794) により、自然数 n に対し、

$$\zeta(1-n)=-\frac{B_n}{n}$$

が示されている。

リーマンゼータ関数の多変数化として、多重ゼータ関数を次の級数により定義する。

$$\zeta(s_1,\cdots,s_r)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}\cdots m_r^{s_r}} \tag{3}$$

多重ゼータ関数の負の整数点での特殊値もベルヌーイ数で表すことができる。本研究では、これらの具体的な数値と数値間での法則性について議論していく。

2　先行研究

まず、多重ゼータ関数の絶対収束域に関する結果を復習する。

命題 1.1(松本,2000) 多重ゼータ関数 $\zeta(s_1,\cdots,s_r)$ は領域 $\{(s_1,\cdots,s_r)\in\mathbb{C}^r|\mathrm{Re}(s_j+\cdots+s_r)>r+1-j, j=1,2,\cdots,r\}$ で絶対収束する。

絶対収束域以外では、定義級数は収束しないことも知られている。一方多重ゼータ関数は $\mathbb{C}^r$ 上に有理型に解析接続され [秋山-江上-谷川,2001]、非正の整数点は多重ゼータ関数の不確定特異点になることが知られている [佐々木,2009]。すなわち多重ゼータ関数の非正の整数点における極限値が存在し、その値は極限のとり方によって異なる。非正の整数点における極限値を求める一つの方法として、小野塚 (2013) による次の結果がある。

定理 1.1(小野塚,2013) $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r\in\mathbb{C}$ は次の 3 条件を満たしながら極限 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r)\to(0,\cdots,0)$ をとるものとする。

$$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r-1}+\varepsilon_r,\varepsilon_{r-2}+\varepsilon_{r-1}+\varepsilon_r,\cdots,\varepsilon_1+\cdots\varepsilon_r\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$$

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j+\cdots+\varepsilon_r}=O(1) \quad (1\le j\le k\le r)$$

このとき $(-n_1,\cdots,-n_r)\in(\mathbb{Z}_{\le 0})^r$ に対し

$$\zeta(-n_1+\varepsilon_1,\cdots,-n_r+\varepsilon_r)=(-1)^{n_r}n_r!$$
$$\times\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_r=n_1+\cdots+n_r+r\\ p_1,\cdots,p_r\ge 0}}{}^{'}\frac{B_{p_1}\cdots B_{p_r}}{p_1!\cdots p_r!}$$
$$\times(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r\text{の有理関数}) \quad +\sum_{j=1}^{r}O(\varepsilon_j)$$

ここで $\sum'$ は、ある条件をみたす $p_1,\cdots,p_r\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ についての和をとる。(条件は卒論を参照)

3　観察

小野塚の公式を用いて r=2 の場合に、非正の整数点における 2 通りの極限値を求める。記号を、{a,b}={1,2} に対し、

$$\zeta(\overset{a}{-n_1},\overset{b}{-n_2}):=\lim_{\varepsilon_b\to 0}\lim_{\varepsilon_a\to 0}\zeta(-n_1+\varepsilon_1,-n_2+\varepsilon_2)$$

と定める。

(n_1,n_2)	(0,2)	(1,1)	(2,0)
$\zeta(\overset{1}{-n_1},\overset{2}{-n_2})$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{240}$	-$\frac{1}{90}$
$\zeta(\overset{2}{-n_1},\overset{1}{-n_2})$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{360}$	-$\frac{1}{120}$

表 1　$n_1+n_2=2$ の場合の極限値

(n_1,n_2)	(0,4)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(4,0)
$\zeta(\overset{1}{-n_1},\overset{2}{-n_2})$	$-\frac{1}{252}$	$-\frac{1}{504}$	$\frac{1}{15120}$	$\frac{11}{10080}$	$\frac{1}{210}$
$\zeta(\overset{2}{-n_1},\overset{1}{-n_2})$	$\frac{1}{210}$	$-\frac{1}{560}$	$-\frac{1}{15120}$	$\frac{13}{10080}$	$\frac{1}{252}$

表 2　$n_1+n_2=4$ の場合の極限値

表から観察できるように、2 重ゼータ関数の非正の整数点での極限値は対称性を持っている。このことから次のようなことが予想できる。

予想

n_1,n_2 が偶数で、$n_1+n_2=2k$ のとき、任意の $l\in\{0,1,2,\cdots k\}$ に対し

$$\zeta(\overset{1}{-2l},\overset{2}{2(l-k)})=-\zeta(\overset{2}{2(l-k)},\overset{1}{-2l})$$

が成り立つ。

4　まとめと今後の課題

2 重ゼータ関数では、n_1,n_2 が偶数かつ n_1+n_2 が偶数の時に対称性がみられた。今後は予想の証明や 3 重、4 重と変数を増やしていき,2 重のときのように極限値同士に関係性があるのか議論を深めていきたい。

参考文献

[1] 荒川恒男 伊吹山知義 金子昌信 『ベルヌーイ数とゼータ関数』牧野書店, 2001

[2] T.Onozuka,*Analytic continuation of multiple zeta-functions and the asymptotic behavior at non-positive integers*,Funct. Approx. Comment. Math., 49 (2013), 331-348